**Électromagnétisme – Chapitre 2**

# Électrostatique – TD

### Exercice 1 : Applications du théorème de Gauss

On considère d'abord un cylindre infini d'axe $(Oz)$ et de rayon $R$ contenant une densité volumique de charge uniforme $\rho$.

**1.** Déterminer l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace à l'aide du théorème de Gauss, puis représenter son évolution.

On considère maintenant un plan infini $(xOy)$ portant une densité surfacique de charge uniforme $\sigma$.

**2.** Déterminer l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace à l'aide du théorème de Gauss, puis représenter son évolution.

**Correction :**

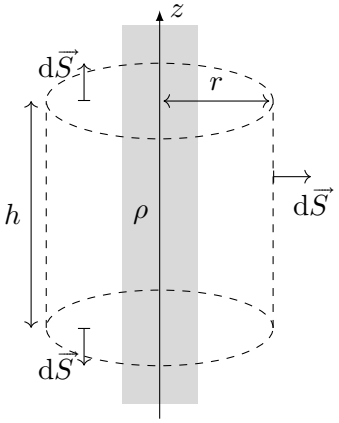
**1.** On applique les différentes étapes du théorème de Gauss.

Choix du système de coordonnées : on considère un point $M(r,\theta,z)$ en coordonnées cylindriques.

Étude des symétries : les plans $(M,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$ et $(M,\vec{e}_r,\vec{e}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges, et comme $\vec{E}(M)$ doit être contenu dans ces plans, on en déduit que : $\vec{E}(M) = E(r,\theta,z)\,\vec{e}_r$.

Étude des invariances : la distribution de charges est invariante par translation selon $z$ et par rotation selon $\theta$, d'où : $\vec{E}(M) = E(r)\,\vec{e}_r$.

Définition de la surface de Gauss : on choisit un cylindre d'axe $(Oz)$ de rayon $r$ et de hauteur $h$ quelconque, d'où :




- pour les surfaces latérales : $\displaystyle\iint_{S_{\text{lat}}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S_{\text{lat}}} (E(r)\,\vec{e}_r)\cdot(\mathrm{d}S\,\vec{e}_r) = E(r)\iint_{S_{\text{lat}}} \mathrm{d}S = E(r)\,2\,\pi\,r\,h\,;$
- pour les surfaces supérieures : $\displaystyle\iint_{S_{\text{sup}}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S_{\text{sup}}} (E(r)\,\vec{e}_r)\cdot(\mathrm{d}S\,\vec{e}_z) = 0\,;$
- pour les surfaces inférieures : $\displaystyle\iint_{S_{\text{inf}}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S_{\text{inf}}} (E(r)\,\vec{e}_r)\cdot(-\mathrm{d}S\,\vec{e}_z) = 0\,;$

et on obtient finalement : $\displaystyle\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \iint_{S_{\text{inf}}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \iint_{S_{\text{sup}}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = E(r)\,2\,\pi\,r\,h.$

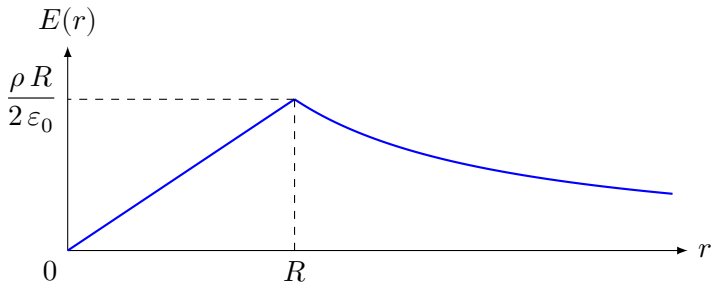
Expression de la charge contenue à l'intérieur de la surface de Gauss : il faut distinguer deux cas :

- si $r \geqslant R$, la surface de Gauss enveloppe toute la distribution de hauteur $h$, $Q_{\text{int}}$ correspond alors à la charge totale de la distribution, soit : $Q_{\text{int}} = \pi\,R^2\,h\,\rho\,;$
- si $r \leqslant R$, la surface de Gauss enveloppe seulement une partie de la distribution de hauteur $h$, $Q_{\text{int}}$ correspond alors à la charge contenue dans ce cylindre, soit : $Q_{\text{int}} = \pi\,r^2\,h\,\rho$.

Application du théorème de Gauss : $\displaystyle\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$, soit : $E(r)\,2\,\pi\,r\,h = \begin{cases} \dfrac{\pi\,r^2\,h\,\rho}{\varepsilon_0} & \text{pour } r \leqslant R \\ \dfrac{\pi\,R^2\,h\,\rho}{\varepsilon_0} & \text{pour } r \geqslant R \end{cases}$,

d'où on en déduit le champ électrostatique : $\vec{E}(M) = \begin{cases} \dfrac{\rho\,r}{2\,\varepsilon_0}\,\vec{e}_r & \text{pour } r \leqslant R \\ \dfrac{\rho\,R^2}{2\,\varepsilon_0\,r}\,\vec{e}_r & \text{pour } r \geqslant R \end{cases}$.

On peut représenter son évolution :



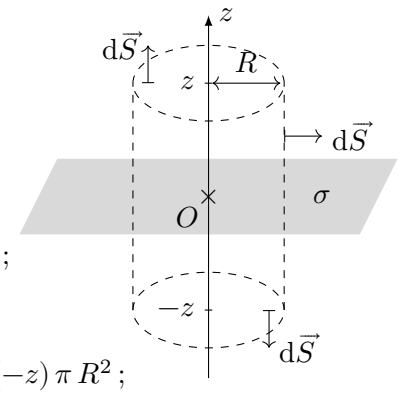

**2.** On applique les différentes étapes du théorème de Gauss.

Choix du système de coordonnées : on considère un point $M(r,\theta,z)$ en coordonnées cylindriques, mais on pourrait également utiliser les coordonnées cartésiennes.

Étude des symétries : les plans $(M,\vec{e}_r,\vec{e}_z)$ et $(M,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges, et comme $\vec{E}(M)$ doit être contenu dans ces plans, on en déduit que : $\vec{E}(M) = E(r,\theta,z)\,\vec{e}_z$.

Étude des invariances : la distribution de charges est invariante par translation selon $r$ et par rotation selon $\theta$, d'où : $\vec{E}(M) = E(z)\,\vec{e}_z$.

Définition de la surface de Gauss : on choisit un cylindre d'axe $(Oz)$ de rayon $R$ quelconque compris entre les cotes $z$ et $-z$ (avec $z>0$), d'où :




- pour les surfaces latérales : $\iint_{S_{\text{lat}}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S_{\text{lat}}} (E\,\vec{e}_z)\cdot(\mathrm{d}S\,\vec{e}_r) = 0\,;$
- pour les surfaces supérieures : $\iint_{S_{\text{sup}}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S_{\text{sup}}} (E(z)\,\vec{e}_z)\cdot(\mathrm{d}S\,\vec{e}_z) = E(z)\iint_{S_{\text{sup}}}\mathrm{d}S = E(z)\,\pi\,R^2\,;$
- pour les surfaces inférieures : $\iint_{S_{\text{inf}}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S_{\text{inf}}} (E(-z)\,\vec{e}_z)\cdot(-\mathrm{d}S\,\vec{e}_z) = -E(-z)\iint_{S_{\text{inf}}}\mathrm{d}S = -E(-z)\,\pi\,R^2\,;$

et on obtient : $\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S_{\text{lat}}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \iint_{S_{\text{sup}}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \iint_{S_{\text{inf}}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = E(z)\,\pi\,R^2 - E(-z)\,\pi\,R^2.$

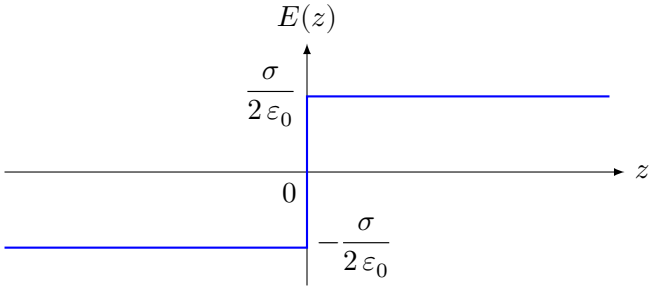
De plus, comme le plan $(xOy)$ est un plan de symétrie de la distribution de charges, le champ électrostatique $\vec{E}(M)$ est symétrique par rapport à ce plan, soit : $E(-z) = -E(z)$, d'où finalement : $\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 2\,E(z)\,\pi\,R^2$.

Expression de la charge contenue à l'intérieur de la surface de Gauss : $Q_{\text{int}} = \pi\,R^2\,\sigma$.

Application du théorème de Gauss : $\oiint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$, soit : $2\,E(z)\,\pi\,R^2 = \dfrac{\pi\,R^2\,\sigma}{\varepsilon_0}$, d'où : $E(z) = \dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}$

pour $z>0$, et on en déduit le champ électrostatique : $\vec{E}(M) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\,\vec{e}_z & \text{pour } z>0 \\ -\dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\,\vec{e}_z & \text{pour } z<0 \end{cases}.$

On peut représenter son évolution :



## Exercice 2 : Analogie avec la gravitation

**1.** Rappeler l'expression de la force électrostatique $\overrightarrow{F_{\text{é}}}$ exercée par une charge ponctuelle $q_0$ située en $O$ sur une charge ponctuelle $q$ située en $M$.

**2.** Rappeler l'expression de la force gravitationnelle $\overrightarrow{F_{\text{g}}}$ exercée par une masse ponctuelle $m_0$ située en $O$ sur une masse ponctuelle $m$ située en $M$.

Comme ces deux forces ont des expressions similaires, on peut établir une analogie entre ces domaines.

**3.** Déterminer la constante analogue à la permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0$ dans le domaine de la gravitation.

De façon analogue au champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$, on définit le champ gravitationnel $\vec{g}(M)$ créé par la masse $m_0$ tel que :

$$\overrightarrow{F_{\text{g}}} = m\,\vec{g}(M).$$

**4.** En déduire un théorème analogue au théorème de Gauss dans le domaine de la gravitation.

**5.** À l'aide de ce théorème, déterminer l'expression du champ gravitationnel $\vec{g}(M)$ en tout point de l'espace créé par une planète que l'on assimile à une boule de rayon $R$ centrée en $O$ et de masse volumique uniforme $\rho$.

**Correction :**

**1.** La force électrostatique s'exprime : $\overrightarrow{F_{\text{é}}} = \dfrac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\dfrac{q_0\,q}{OM^3}\,\overrightarrow{OM}$.

**2.** La force gravitationnelle s'exprime : $\overrightarrow{F_{\text{g}}} = -G\,\dfrac{m_0\,m}{OM^3}\,\overrightarrow{OM}$, avec $G$ la constante gravitationnelle.

**3.** En comparant les constantes dans les expressions des deux forces, on en déduit que $\dfrac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_0}$ est analogue à $-G$. La constante analogue à $\varepsilon_0$ dans le domaine de la gravitation est alors : $-\dfrac{1}{4\,\pi\,G}$.

**4.** On peut énoncer un théorème analogue au théorème de Gauss dans le domaine de la gravitation : le flux du champ gravitationnel $\vec{g}$ sortant à travers une surface fermée $S$ est : $\oiint_S \vec{g}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = -4\,\pi\,G\,M_{\text{int}}$, avec $M_{\text{int}}$ la masse contenue à l'intérieur de cette surface.

**5.** On considère un point $M(r,\theta,\varphi)$ en coordonnées sphériques.

On étudie les symétries : les plans $(M,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$ et $(M,\vec{e}_r,\vec{e}_\varphi)$ sont des plans de symétrie de la distribution de masses, et comme $\vec{g}(M)$ doit être contenu dans chacun de ces plans, on en déduit que : $\vec{g}(M) = g(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_r$.

On étudie les invariances : la distribution de masses est invariante par rotation selon $\theta$ et $\varphi$, d'où : $\vec{g}(M) = g(r)\,\vec{e}_r$.

On choisit pour surface de Gauss une sphère de rayon $r$ centrée en $O$, d'où : $\oiint_S \vec{g}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \oiint_S (g(r)\,\vec{e}_r)\cdot(\mathrm{d}S\,\vec{e}_r) = g(r)\oiint_S \mathrm{d}S = g(r)\,4\,\pi\,r^2$.

Pour exprimer la masse $M_{\text{int}}$ à l'intérieur de la surface de Gauss, il faut distinguer deux cas :

- si $r \geqslant R$, la surface de Gauss enveloppe toute la distribution, soit : $M_{\text{int}} = \dfrac{4}{3}\,\pi\,R^3\,\rho$ ;
- si $r \leqslant R$, la surface de Gauss enveloppe seulement une partie de la distribution, soit : $M_{\text{int}} = \dfrac{4}{3}\,\pi\,r^3\,\rho$.

L'application du théorème de Gauss gravitationnel donne : $\oiint_S \vec{g}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = -4\,\pi\,G\,M_{\text{int}}$, soit :

$$g(r)\,4\,\pi\,r^2 = \begin{cases} -4\,\pi\,G\,\dfrac{4}{3}\,\pi\,r^3\,\rho & \text{pour } r \leqslant R \\ -4\,\pi\,G\,\dfrac{4}{3}\,\pi\,R^3\,\rho & \text{pour } r \geqslant R \end{cases}$$

, d'où on en déduit le champ gravitationnel créé par cette planète : $\vec{g}(M) = \begin{cases} -\dfrac{4\,\pi\,G\,\rho\,r}{3}\,\vec{e}_r & \text{pour } r \leqslant R \\ -\dfrac{4\,\pi\,G\,\rho\,R^3}{3\,r^2}\,\vec{e}_r & \text{pour } r \geqslant R \end{cases}$.

### Exercice 3 : Champ et potentiel sur un axe présentant des charges

On considère un axe $(Ox)$ sur lequel est situé une charge $Q_1 = 3\,q$ à l'abscisse $x = 0$ et une charge $Q_2 = -q$ à l'abscisse $x = a$, avec $a > 0$.

**1.** Déterminer les positions sur l'axe où le potentiel électrostatique s'annule, sachant que celui-ci s'annule également à l'infini.

**2.** Déterminer les positions sur l'axe où le champ électrostatique s'annule.

**Correction :**

**1.** Le potentiel électrostatique généré sur l'axe par la charge $Q_1$ est : $V_1(x) = \dfrac{3\,q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,|x|} + C_1$, avec $C_1$ une constante.
Le potentiel électrostatique généré sur l'axe par la charge $Q_2$ est : $V_2(x) = \dfrac{-q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,|x-a|} + C_2$, avec $C_2$ une constante.
On en déduit le potentiel résultant : $V(x) = V_1(x) + V_2(x) = \dfrac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\dfrac{3}{|x|} - \dfrac{1}{|x-a|}\right) + C_3$, avec la constante $C_3 = 0$ car le potentiel s'annule à l'infini.
Le potentiel s'annule aux abscisses $x$ tels que : $V(x) = 0$, soit : $3\,|x-a| = |x|$, et il faut étudier les différents cas :

- si $x > a$, alors : $3\,(x-a) = x$, d'où une annulation sur cet intervalle en : $x = \dfrac{3\,a}{2}$ ;
- si $0 < x < a$, alors : $-3\,(x-a) = x$, d'où une annulation sur cet intervalle en : $x = \dfrac{3\,a}{4}$ ;
- si $x < 0$, alors : $-3\,(x-a) = -x$, il n'y a pas d'annulation sur cet intervalle.

**2.** Le champ électrostatique généré sur l'axe par la charge $Q_1$ est : $\overrightarrow{E}_1(x) = \begin{cases} -\dfrac{3\,q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,x^2}\,\vec{e}_x & \text{pour } x < 0 \\ \dfrac{3\,q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,x^2}\,\vec{e}_x & \text{pour } x > 0 \end{cases}$.

Le champ électrostatique généré sur l'axe par la charge $Q_2$ est : $\overrightarrow{E}_2(x) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,(x-a)^2}\,\vec{e}_x & \text{pour } x < a \\ -\dfrac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,(x-a)^2}\,\vec{e}_x & \text{pour } x > a \end{cases}$.

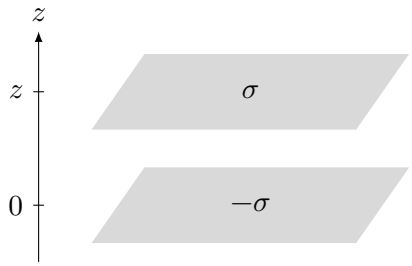
Le champ résultant est alors : $\overrightarrow{E}(x) = \overrightarrow{E}_1(x) + \overrightarrow{E}_2(x) = \begin{cases} \dfrac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left[-\dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{(x-a)^2}\right]\vec{e}_x & \text{pour } x < 0 \\ \dfrac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left[\dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{(x-a)^2}\right]\vec{e}_x & \text{pour } 0 < x < a \\ \dfrac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left[\dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{(x-a)^2}\right]\vec{e}_x & \text{pour } x > a \end{cases}$.

Le champ s'annule aux abscisses $x$ tels que : $\overrightarrow{E}(x) = \vec{0}$, et il faut étudier les différents cas :

- si $x > a$, alors : $\dfrac{3}{x^2} = \dfrac{1}{(x-a)^2}$, soit : $\dfrac{\sqrt{3}}{x} = \dfrac{1}{x-a}$, d'où une annulation sur cet intervalle en : $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$ ;
- si $0 < x < a$, alors : $\dfrac{3}{x^2} = -\dfrac{1}{(x-a)^2}$, il n'y a pas d'annulation sur cet intervalle ;
- si $x < 0$, alors : $\dfrac{3}{x^2} = \dfrac{1}{(x-a)^2}$, il n'y a pas d'annulation sur cet intervalle.

## Exercice 4 : Bilan d'énergie dans un condensateur plan

On considère un condensateur plan constitué de deux armatures de surface $S$ et séparées par une distance $z$ petite devant la taille des armatures, comme schématisé ci-dessous.




L'armature inférieure, fixée en $z = 0$, possède une densité surfacique de charge $-\sigma$ et créé un champ électrostatique qui s'exprime :

$$\overrightarrow{E}_0(M) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\,\vec{e}_z & \text{pour } z > 0 \\ \dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\,\vec{e}_z & \text{pour } z < 0 \end{cases}.$$

L'armature supérieure est mobile, elle possède une densité surfacique de charge $\sigma$.

**1.** Déterminer la force électrostatique $\overrightarrow{F}_{\text{él}}$ exercée par l'armature inférieure sur l'armature supérieure.

L'armature supérieure est initialement à la position $z = 0$, l'énergie emmagasinée dans le condensateur est alors nulle. Un opérateur exerce une force $\overrightarrow{F}_{\text{op}}$ sur l'armature supérieure pour l'amener jusqu'à l'altitude $z$. On suppose que le déplacement est quasi-statique, et que la densité surfacique de charge des deux armatures reste inchangée.

**2.** Déterminer le travail de la force exercée par l'opérateur pour écarter les deux armatures.

**3.** Rappeler l'expression de l'énergie électrostatique emmagasinée dans un condensateur plan en fonction de sa capacité $C$ et de la charge $q$ portée par l'une de ses armatures.

**4.** Déterminer l'expression de la capacité $C$ de ce condensateur plan.

**Correction :**

**1.** L'armature supérieure porte une charge $q = \sigma\,S$, elle subit une force électrostatique : $\overrightarrow{F}_{\text{él}} = q\,\overrightarrow{E}_0 = -\dfrac{\sigma^2\,S}{2\,\varepsilon_0}\,\vec{e}_z$.

**2.** La force exercée par l'opérateur compense exactement la force électrostatique pour un déplacement quasi-statique, soit : $\overrightarrow{F}_{\text{op}} = -\overrightarrow{F}_{\text{él}}$.

Son travail s'exprime donc : $W_{\text{op}} = \displaystyle\int_0^z \overrightarrow{F}_{\text{op}} \cdot (\mathrm{d}z\,\vec{e}_z) = \int_0^z \frac{\sigma^2\,S}{2\,\varepsilon_0}\,\mathrm{d}z = \frac{\sigma^2\,S}{2\,\varepsilon_0}\,z$.

**3.** L'énergie électrostatique emmagasinée dans un condensateur plan est : $\mathcal{E} = \dfrac{q^2}{2\,C}$.

**4.** Comme l'énergie électrostatique emmagasinée correspond au travail de la force exercée par l'opérateur, on obtient : $\mathcal{E} = W_{\text{op}}$, soit : $\dfrac{q^2}{2\,C} = \dfrac{\sigma^2\,S}{2\,\varepsilon_0}\,z$, avec la charge portée par l'armature supérieure $q = \sigma\,S$, d'où on en déduit l'expression de la capacité : $C = \dfrac{\varepsilon_0\,S}{z}$.

## Exercice 5 : Boule chargée non uniformément

On considère une boule de rayon $R$ et de centre $O$ dans le vide. Pour $r \leqslant R$, elle présente une distribution de charges volumique non uniforme qui s'exprime en coordonnées sphériques :

$$\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

avec $\rho_0$ une constante.

On rappelle l'expression du gradient en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\vec{e}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\,\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\,\frac{\partial f}{\partial \varphi}\,\vec{e}_\varphi.$$

**1.** Déterminer l'expression de la charge totale $Q$ portée par la boule.

**2.** Déterminer l'expression du champ électrostatique $\overrightarrow{E}(M)$ en tout point $M$ de l'espace en fonction de la charge $Q$.

**3.** En déduire l'expression du potentiel électrostatique $V(M)$ en tout point $M$ de l'espace, sachant que celui-ci est nul à l'infini.

**Correction :**

**1.** On exprime la charge totale en intégrant la charge des volumes élémentaires en coordonnées sphériques : $Q = \iiint_{\text{boule}} \rho(r)\,\mathrm{d}V = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right) r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$, soit : $Q = \rho_0\int_0^R\left(r^2-\frac{r^4}{R^2}\right)\mathrm{d}r\int_0^\pi \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \rho_0\left[\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5R^2}\right]_0^R\left[-\cos\theta\right]_0^\pi\left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \frac{8}{15}\,\pi R^3\,\rho_0$.

**2.** On considère un point $M(r,\theta,\varphi)$ en coordonnées sphériques.
On étudie les symétries : les plans $(M,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$ et $(M,\vec{e}_r,\vec{e}_\varphi)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges, et comme $\overrightarrow{E}(M)$ doit être contenu dans ces plans, on en déduit que : $\overrightarrow{E}(M) = E(r,\theta,\varphi)\,\vec{e}_r$.
On étudie les invariances : la distribution de charges est invariante par rotation selon $\theta$ et $\varphi$, d'où : $\overrightarrow{E}(M) = E(r)\,\vec{e}_r$.
On choisit pour surface de Gauss une sphère de rayon $r$ centrée en $O$, d'où : $\oiint_S \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \oiint_S (E(r)\,\vec{e}_r)\cdot(\mathrm{d}S\,\vec{e}_r) = E(r)\oiint_S \mathrm{d}S = E(r)\,4\,\pi\,r^2$.
Pour exprimer la charge contenue à l'intérieur de la surface de Gauss, il faut distinguer deux cas :

- si $r \geqslant R$, la surface de Gauss enveloppe toute la distribution, soit : $Q_{\text{int}} = Q$ ;
- si $r \leqslant R$, la surface de Gauss enveloppe une partie de la distribution, soit : $Q_{\text{int}} = \rho_0\int_0^r\left(r^2-\frac{r^4}{R^2}\right)\mathrm{d}r\int_0^\pi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = 4\,\pi\,\rho_0\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5R^2}\right) = \frac{15\,Q}{2\,R^3}\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5R^2}\right)$.

L'application du théorème de Gauss donne : $\oiint_S \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$, soit : $E(r)\,4\,\pi\,r^2 = \begin{cases} \frac{15\,Q}{2\,R^3\,\varepsilon_0}\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5R^2}\right) & \text{pour } r\leqslant R \\ \frac{Q}{\varepsilon_0} & \text{pour } r\geqslant R \end{cases}$, d'où on en déduit le champ électrostatique : $\overrightarrow{E}(M) = \begin{cases} \frac{15\,Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{r}{3\,R^3}-\frac{r^3}{5\,R^5}\right)\vec{e}_r & \text{pour } r\leqslant R \\ \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}\,\vec{e}_r & \text{pour } r\geqslant R \end{cases}$.

**3.** Comme $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\,\vec{e}_r$, on en déduit : $V(M) = \begin{cases} \frac{15\,Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0}\left(-\frac{r^2}{6\,R^3}+\frac{r^4}{20\,R^5}\right)+C_1 & \text{pour } r\leqslant R \\ \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r}+C_2 & \text{pour } r\geqslant R \end{cases}$,
avec $C_1$ et $C_2$ des constantes.
Sachant que $V(r\to+\infty) = 0$, on en déduit que : $C_2 = 0$.
Le potentiel doit également être continu en $r = R$, soit : $V(R) = \frac{15\,Q}{8\,\pi\,\varepsilon_0}\left(-\frac{R^2}{6\,R^3}+\frac{R^4}{20\,R^5}\right)+C_1 = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,R}$, d'où on en déduit : $C_1 = \frac{15\,Q}{32\,\pi\,\varepsilon_0\,R}$.

On obtient finalement : $V(M) = \begin{cases} \dfrac{15\,Q}{16\,\pi\,\varepsilon_0}\left(-\dfrac{r^2}{3\,R^3}+\dfrac{r^4}{10\,R^5}+\dfrac{1}{2\,R}\right) & \text{pour } r \leqslant R \\ \dfrac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r} & \text{pour } r \geqslant R \end{cases}$.

## Exercice 6 : Champ créé par un disque au voisinage de son axe

On considère un disque de centre $O$, de rayon $R$ et d'axe $(Oz)$ portant une distribution surfacique de charge uniforme $\sigma$. On souhaite déterminer le champ électrostatique créé par ce disque au voisinage de son axe.

On s'intéresse tout d'abord au champ électrostatique $\vec{E}_{\text{axe}}(M)$ créé en un point $M$ de côte $z > 0$ situé sur l'axe $(Oz)$.

**1.** Exprimer le champ électrostatique $\mathrm{d}\vec{E}_{\text{axe}}(M)$ créé par une surface $\mathrm{d}S$ du disque située en un point $P(r,\theta,0)$ repéré par ses coordonnées cylindriques.

**2.** En déduire l'expression du champ électrostatique $\vec{E}_{\text{axe}}(M)$ créé par le disque sur l'axe $(Oz)$.

On s'intéresse maintenant au champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé en un point $M(r,\theta,z>0)$ situé au voisinage de l'axe $(Oz)$.

**3.** En appliquant le théorème de Gauss à un cylindre d'axe $(Oz)$, de petit rayon $r$ et contenu entre les côtes $z$ et $z+\mathrm{d}z$, montrer que la composante radiale du champ électrostatique vérifie :

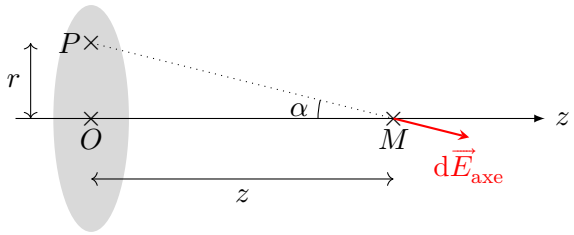
$$E_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}E_{\text{axe}}}{\mathrm{d}z}$$

en supposant que la composante $E_z(M)$ est égale à celle déterminée précédemment sur l'axe $(Oz)$.

**4.** En déduire l'expression du champ électrostatique $\vec{E}(M)$ créé par le disque au voisinage de l'axe $(Oz)$.

**Correction :**

**1.** On schématise la situation :




Le champ électrostatique créé par la charge $\mathrm{d}q = \sigma\,\mathrm{d}S$ située en un point $P$ s'exprime à l'aide de la loi de Coulomb : $\mathrm{d}\vec{E}_{\text{axe}}(M) = \dfrac{\mathrm{d}q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,PM^2}\,\vec{u}_{PM} = \dfrac{\sigma\,\mathrm{d}S}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,(r^2+z^2)}\,(\cos\alpha\,\vec{e}_z - \sin\alpha\,\vec{e}_r)$, avec $\cos\alpha = \dfrac{z}{\sqrt{r^2+z^2}}$ et $\sin\alpha = \dfrac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}$, soit : $\mathrm{d}\vec{E}_{\text{axe}}(M) = \dfrac{\sigma\,\mathrm{d}S}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,(r^2+z^2)^{3/2}}\,(z\,\vec{e}_z - r\,\vec{e}_r)$.

**2.** Comme tout plan contenant l'axe $(Oz)$ est un plan de symétrie de la distribution de charges, on en déduit que le champ électrostatique résultant $\vec{E}_{\text{axe}}(M)$ est orienté selon $\vec{e}_z$, d'où : $\vec{E}_{\text{axe}}(M) = \iint_{\text{disque}} \mathrm{d}E_{\text{axe},z}\,\vec{e}_z = \int_{r=0}^{R}\int_{\theta=0}^{2\,\pi} \dfrac{\sigma\,\mathrm{d}r\,r\,\mathrm{d}\theta}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,(r^2+z^2)^{3/2}}\,z\,\vec{e}_z = \dfrac{\sigma\,z\,\vec{e}_z}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\left[-(r^2+z^2)^{-1/2}\right]_0^R[\theta]_0^{2\,\pi}$, soit finalement : $\vec{E}_{\text{axe}}(M) = \dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\left(1-\dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\vec{e}_z$.

**3.** On étudie les symétries : le plan $(M,\vec{e}_r,\vec{e}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de charges, et comme $\vec{E}(M)$ doit être contenu dans ce plan, on en déduit que : $\vec{E}(M) = E_r(r,\theta,z)\,\vec{e}_r + E_z(r,\theta,z)\,\vec{e}_z$, avec $E_z(r,\theta,z) = E_{\text{axe}}(z)$ en supposant que celle-ci est égale à celle déterminée précédemment sur l'axe.
On étudie les invariances : la distribution de charges est invariante par rotation selon $\theta$, d'où : $\vec{E}(M) = E_r(r,z)\,\vec{e}_r + E_{\text{axe}}(z)\,\vec{e}_z$.
On obtient pour le petit cylindre :

- pour les surfaces latérales : $\iint_{S_{\text{lat}}} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S_{\text{lat}}} [E_r(r,z)\,\vec{e}_r + E_{\text{axe}}(z)\,\vec{e}_z]\cdot(\mathrm{d}S\,\vec{e}_r) = E_r(r,z)\,2\,\pi\,r\,\mathrm{d}z$ ;

- pour les surfaces supérieures : $\iint_{S_{\text{sup}}} \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint_{S_{\text{sup}}} [E_r\,\vec{e}_r + E_{\text{axe}}(z+\mathrm{d}z)\,\vec{e}_z]\cdot(\mathrm{d}S\,\vec{e}_z) = E_{\text{axe}}(z+\mathrm{d}z)\,\pi\,r^2$ ;
- pour les surfaces inférieurs : $\iint_{S_{\text{inf}}} \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint_{S_{\text{inf}}} [E_r\,\vec{e}_r + E_{\text{axe}}(z)\,\vec{e}_z]\cdot(-\mathrm{d}S\,\vec{e}_z) = -E_{\text{axe}}(z)\,\pi\,r^2$ ;

d'où : $\oiint_S \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \iint_{S_{\text{lat}}} \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} + \iint_{S_{\text{inf}}} \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} + \iint_{S_{\text{sup}}} \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = E_r(r,z)\,2\,\pi\,r\,\mathrm{d}z + [E_{\text{axe}}(z+\mathrm{d}z) - E_{\text{axe}}(z)]\,\pi\,r^2$,

soit : $\oiint_S \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} \approx E_r(r,z)\,2\,\pi\,r\,\mathrm{d}z + \dfrac{\mathrm{d}E_{\text{axe}}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z\,\pi\,r^2$.

En l'absence de charge dans le cylindre, l'application du théorème de Gauss donne : $\oiint_S \overrightarrow{E}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = 0$,

soit : $E_r(r,z)\,2\,\pi\,r\,\mathrm{d}z + \dfrac{\mathrm{d}E_{\text{axe}}}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z\,\pi\,r^2 = 0$, d'où finalement : $E_r(r,z) = -\dfrac{r}{2}\,\dfrac{\mathrm{d}E_{\text{axe}}}{\mathrm{d}z}$.

**4.** On obtient : $E_r(r,z) = -\dfrac{r}{2}\,\dfrac{\mathrm{d}E_{\text{axe}}}{\mathrm{d}z} = \dfrac{r}{2}\,\dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} - \dfrac{z^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\right)$, d'où l'expression du champ électrostatique : $\overrightarrow{E}(M) = \dfrac{r\,\sigma}{4\,\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} - \dfrac{z^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}\right)\vec{e}_r + \dfrac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\left(1 - \dfrac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\vec{e}_z$.